

## e-GPS水準測量精度研究

林老生\*

論文收件日期：100年7月7日  
論文接受日期：101年3月1日

### 摘 要

由e-GPS測量之點位橢球高 $h$ ，係自橢球面起算至點位之垂直距離；然而，在台灣地區採用高程系統為正高 $H$ ，係自基隆平均海水面（大地水準面）起算至點位之垂直距離。就某一點而言，由於橢球面與大地水準面不重合，所以兩面之間有一段分離量，稱為大地起伏 $N$ ； $N$ 值可以由橢球高 $h$ 與正高 $H$ 計算之（ $N=h-H$ ）。

內政部曾經在台灣全島2065個一等水準點上實施GPS測量與水準測量；因此，這些水準點的橢球高 $h$ 與正高 $H$ 皆已知，因此可以計算2065個水準點的大地起伏 $N$ 。再利用此2065個水準點的大地起伏，可以建構區域大地起伏模式。如果區域大地起伏模式建構完成，可以根據點位的平面坐標，內插其大地起伏 $N$ ，則該點的正高 $H$ 值，可以由e-GPS所測之橢球高 $h$ 與大地起伏 $N$ 相減求得（ $H=h-N$ ）；此即e-GPS水準測量的意義。

因此，本文將以內政部所提供的一等水準點資料以及台南市政府所提供的一等水準點上之e-GPS測量成果，探討e-GPS水準測量精度有關的議題：（1）建構區域大地起伏模式及有關精度分析，（2）在一等水準點上實施e-GPS水準測量，得到正高估值，再與已知正高值比較，分析e-GPS水準測量的精度。

關鍵詞：e-GPS水準測量、神經網路、橢球高、正高、大地起伏

---

\* 副教授，國立政治大學地政學系，TEL: (02) 29393091 #51555，E-mail: lslin@nccu.edu.tw

# Study on the accuracy of e-GPS leveling

Lao-Sheng Lin\*

## Abstract

The ellipsoidal height ( $h$ ) determined by e-GPS is referred to the ellipsoid surface. However, the orthometric height ( $H$ ) used in engineering application is referred to local geoid. Since the ellipsoid surface and local geoid are not coinciding, the separation between these 2 surfaces for a specific point is defined as undulation  $N$ .

In the Taiwan region, a new national vertical datum, TaiWan Vertical Datum 2001 (TWVD2001), was established using the varied observations of 2065 benchmarks between 2000 and 2003. Each benchmark has two types of heights, namely orthometric height  $H$  and ellipsoidal height  $h$ . Then, it is possible to generate a regional geoid model using data of 2065 benchmarks. Since e-GPS surveying work is relatively time-saving. Hence, if a regional geoid model can be generated from these 2065 benchmarks with an adequate degree of accuracy, then, it is possible to transform the ellipsoidal height  $h$  from the e-GPS to the orthometric height  $H$ . This procedure is defined as e-GPS leveling.

In this paper, issues relating to the accuracy of e-GPS leveling are studied, such as the establishment of regional geoid models, the achieved accuracies of e-GPS leveling compared to the announced orthometric heights by Minister of Interior. The detailed test results will be presented in this paper.

**Keywords:** e-GPS Leveling, Artificial Neural Network, Ellipsoidal Height, Orthometric Height, Undulation

---

\* Associate Professor, Department of Land Economics, National Chengchi University, TEL: (02) 29393091 #51555, E-mail: lslin@nccu.edu.tw

## 一、前 言

台南市政府於民國九十六年九月，完成涵蓋該市的e-GPS即時動態定位系統（以下簡稱e-GPS系統）建置（吳相忠，2008），該系統含6個主站。復於民國九十九年四月，增設玉井主站，以提昇山區e-GPS測量精度及效率。台南市e-GPS系統，經野外實地測試結果顯示，平面精度為 $\pm 2\text{cm}$ ，橢球高精度為 $\pm 5\text{cm}$ （台南市，2011）。

對於地表上的任意點位而言，可以用e-GPS系統測量得該點位的橢球高 $h$ ，或是用水準測量或其他工程測量方式求得該點的正高 $H$ 。橢球高 $h$ 與正高 $H$ 的基準面不同，橢球高的基準面為可以數學公式描述的規則橢球面，而正高的基準面則為以位能描述的不規則大地水準面；因此，任意點的橢球高與正高不一樣，兩者之間有一差值，一般稱為大地起伏 $N$ 。

假設地面點之垂線偏差很小可以忽略不計，那麼地面上任意點的橢球高 $h$ 、正高 $H$ 與大地起伏 $N$ 三者之間，可用一個簡單的數學方程式表示之： $h = H + N$ （Hu, et al., 2004; Kavzoglu and Saka, 2005; Kuhar et al., 2001; Stopar et al., 2006）。因此，如果已知 $h$ 、 $H$ 、 $N$ 三個參數中的任意兩個量（如 $h$ 及 $N$ ），那麼就可以由上述方程式計算出第三個參數（如 $H = h - N$ ）。以上所述，就是e-GPS水準測量的基本原理。換句話說，如果地面點的大地起伏 $N$ 可以估算的話，利用e-GPS測量點位之橢球高 $h$ ，由方程式 $H = h - N$ ，可以求得點位的正高 $H$ 。

由於大地水準面為一不規則的物理面，而橢球面為一規則的數學面，所以兩面間的差距，乃成為一不規則的大地起伏曲面；因此，大地起伏曲面，就是相對於橢球面的大地水準面。換言之，地表上任意一點的大地起伏 $N$ ，可以由該點的正高 $H$ 及橢球高 $h$ ，利用方程式 $N = h - H$ 求得大地起伏 $N$ 。

對於某一個測區而言，如果已知該區域內控制點的點位平面坐標與大地起伏的函數關係，那麼則可以透過內插方法，求得區域內任意點對應的大地起伏值。如果所估計的大地起伏值精度合乎工作要求，配合e-GPS系統測量的點位橢球高，則可以透過e-GPS水準測量，快速的獲得任意點位的正高，滿足測量製圖的需求，以充分發揮e-GPS系統快速定位的功效。

過去，已有許多專家學者，針對幾何擬合法建構區域大地起伏模式主題從事相關研究，其所採用的幾何擬合方法有：多項式法（王文安，2005；吳良才等，2004；姚吉利等，2008；張京禮等，2004；黃聖日等，2011；鄭志毅等，2008；Hu, et al., 2004; Lin, 2007）、神經網路法（Hu, et al., 2004; Kavzoglu and Saka,

2005; Kuhar, et al., 2001; Lin, 2007; Stopar et al., 2006)、支持向量機法(王繼剛等, 2009; 李尚訓, 2010; 周里含, 2010; 高書屏等, 2011; 董玉磊等, 2007; Zaletnyik, et al., 2008)等。在這些研究報告中, 作者(們)針對不同的區域狀況, 提出不同的幾何擬合法, 建構區域大地起伏模式, 對大地起伏模式擬合精度加以探討, 並獲取不錯的研究成果。

由於, 台灣地區除了台南市政府建置的e-GPS系統之外, 尚有其他單位, 如內政部國土測繪中心建置的e-GPS系統(王敏雄, 2005)。因此, 利用e-GPS系統測量點位的三維坐標已經非常方便。如果能夠建構符合精度要求的區域大地起伏模式, 配合e-GPS水準測量作業程序, 那麼, 利用e-GPS系統不但可以快速確定任何點位的平面坐標, 還可以迅速求得點位的正高, 提供工程、災後重建、及其他測量製圖所需, 以充分發揮e-GPS系統的功效。

因此, 本文將以內政部所提供的一等水準點資料(含點號、平面坐標、橢球高、正高等)以及台南市政府所提供的一等水準點上之e-GPS測量成果(含點號、平面坐標、橢球高等), 探討與e-GPS水準測量精度有關的議題:(1)建構區域大地起伏模式及有關精度分析,(2)在一等水準點上實施e-GPS水準測量的精度分析。

本文共分五節, 第一節為前言, 第二節為GPS水準測量原理, 第三節為以幾何擬合法建構區域的大地起伏模式, 第四節為實驗結果與討論, 第五節為本文結論。

## 二、GPS水準測量原理

### (一) 台灣地區常用的高程系統

台灣地區常用的高程系統, 有橢球高, 正高, 以及大地起伏; 茲將上述名詞有關定義說明如下。

橢球高, 是以橢球面為基準面的高程系統, 通常用 $h$ 代表橢球高。地面點的橢球高, 為從地面點起沿通過該點的法線到橢球面的距離。由GPS測量得到之地面點的高程, 屬於橢球高, 係相對於WGS84 (World Geodetic System, 1984) 橢球體的橢球面。

正高, 是以大地水準面為基準面的高程系統, 通常用 $H$ 代表正高。地面點的正高, 為從地面點起沿通過該點的垂線到大地水準面的距離。臺灣地區的大地水準面, 是定義在1990年1月1日標準大氣環境情況下, 並採用基隆驗潮站1957年至1991

年之潮汐資料化算而得，命名為2001台灣高程基準（TaiWan Vertical Datum 2001，簡稱TWVD2001）。

大地起伏，地面點的橢球高 $h$ 及正高 $H$ 之間的差值，通常用 $N$ 代表大地起伏（ $N = h - H$ ）。假定地面點的垂線偏差為零或是很小可以忽略不計，此時，通過該點的橢球法線與垂線平行或重合。因此，地面點的大地起伏 $N$ ，是沿著通過該點的法線，由大地水準面到橢球面間的距離。

## （二）GPS水準測量原理

如果假設地面點之垂線偏差很小可以忽略不計，那麼該點的正高 $H$ 、橢球高 $h$ 與大地起伏 $N$ 三者之關係，可用下列方程式來表示（Hu, et al., 2004; Kavzoglu and Saka, 2005; Kuhar et al., 2001; Lin, 2007; Stopar et al., 2006）：

$$h = H + N \dots\dots\dots (1)$$

方程式（1）所示，就是GPS水準測量的原理。換言之，如果知道方程式（1）中任意兩個量，就可以由該方程式算出第三個量。例如，由GPS測量得到某地面點之橢球高 $h$ ，而且已知該點的大地起伏 $N$ ，就可以用下列方程式，求出該點的正高 $H$ ：

$$H = h - N \dots\dots\dots (2)$$

綜上所述，GPS水準測量的關鍵，就是在於求出GPS測站上的大地起伏 $N$ 。因此，在利用GPS確定了點位橢球高 $h$ 後，欲求得該點的正高 $H$ ，必須先確定該點的大地起伏 $N$ 。由於e-GPS測量為GPS測量方法之一，故上述的GPS水準測量原理，也適用於e-GPS測量；因此，本文中所述的e-GPS水準測量，與上述GPS水準測量同意。

## 三、以幾何擬合法建構區域的大地起伏模式

GPS測量所提供的高程，為相對於WGS-84橢球面的橢球高 $h$ ，它是一個幾何量，沒有物理上的意義。除了特別用途外，在實際工程應用上，必須把橢球高 $h$ ，轉換為以大地水準面為基準面的正高 $H$ 。

進行GPS水準測量時，要考慮WGS-84橢球和大地水準面之間的高程差，即大地起伏 $N$ 。大地水準面，是與靜止的平均海水面相重合的一個重力等位面，其與地球內部質量分部有關，因此精確求得大地起伏比較困難。目前的做法有三（楊明清等，1999）：第一種方法，是依據斯托克斯公式，採用重力法，求大地起伏。利用

此方法，必須有一定精度、分布良好的重力數據和地形模型資料，這在許多地區難以滿足。第二種方法，是用地球重力場模型，求大地起伏。但是地球重力場模型，只反映大地水準面的長波變化，要達到以GPS精密測定的橢球高精度為時過早。第三種方法，是採用幾何擬合法。

所謂幾何擬合法，是在一個測區內用GPS測量相當數量的控制點，求出控制點的平面（縱橫線）坐標與橢球高 $h$ ；同時，在測區中的某些控制點上，實施直接水準測量，獲得這些點的正高 $H$ ，如果忽略垂線偏差的影響，就可以用下列方程式，求出這些共同點（同時施測GPS測量與水準測量的點位）的大地起伏 $N$ ：

$$N = h - H \dots\dots\dots (3)$$

由於，所有共同點的平面坐標 $(x,y)$ 及大地起伏 $N$ 已知。因此，可以用某種數學方程式，如平面方程式（如方程式（4））、多項式曲面方程式（如方程式（5）、（6））或其他演算法（如神經網路、支持向量機）等，來擬合測區的大地起伏曲面：

$$N(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y \dots\dots\dots (4)$$

$$N(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \dots\dots\dots (5)$$

$$N(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \dots\dots\dots (6)$$

式中， $(x,y)$ 為共同點的平面坐標； $N(x,y)$ 為該點位對應的大地起伏； $a_0 \dots a_5$ 為代表平面方程式或多項式曲面方程式的待定係數。如果測區共同點的數量大於待定係數的數量，則可利用最小二乘法求解所有待定係數。

一旦平面方程式或多項式曲面方程式的待定係數確定後，就可以利用上述方程式推算其他點（假設已知該點的平面坐標 $(x,y)$ ）的大地起伏 $N$ ，從而確定局部範圍內的大地起伏曲面，以上所述即為幾何擬合法。

因此，建構區域大地起伏模式的任務，就是利用共同點的平面坐標 $(x,y)$ 及大地起伏 $N$ ，確定擬合該區域大地起伏曲面的數學模型。如果確定了一個區域的大地起伏數學模型（如以多項式曲面方程式，代表區域大地起伏曲面），則在該區域任一GPS點測得平面坐標 $(x,y)$ ，可由方程式（4）至（6），求得該點的大地起伏 $N$ ，再根據方程式（2），即可以將橢球高 $h$ 轉換成正高 $H$ 。

以下，簡單介紹本文將採用之兩種幾何擬合法：多項式擬合法及神經網路擬合法。

(一) 多項式擬合法

多項式擬合法之原理，是根據測區中相當數量之已知平面坐標 (x,y) 和大地起伏N的控制點，用多項式來擬合測區的大地起伏曲面；再根據待求點的平面坐標 (x,y)，內插出該點的大地起伏，從而求出待求點的正高（王文安，2005；田新亞、姜川，2008；吳良才等，2004；姚吉利等，2008；張京禮等，2004；黃聖日等，2011；鄭志毅等，2008；Hu, et al., 2004; Lin, 2007）。

假設測站的大地起伏N和其平面坐標 (x,y) 間，存在以下的函數關係：

$$N_i = f(x_i, y_i) + v_i, i = 1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (7)$$

式中， $N_i$ 為*i*點的大地起伏， $f(x_i, y_i)$ 為區域大地起伏曲面的趨勢值， $v_i$ 為誤差。

$f(x_i, y_i)$ ，可以用以下空間曲面函數來表示：

$$f(x_i, y_i) = a_0 + a_1x_i + a_2y_i + a_3x_i^2 + a_4x_iy_i + a_5y_i^2 + a_6x_i^3 + a_7x_i^2y_i + a_8x_iy_i^2 + a_9y_i^3 \dots \dots \dots (8)$$

式中， $a_0 \dots a_9$ 為待定係數，於是如果有*n*個共同點（同時施測GPS測量與水準測量的點位），則根據方程式（7）及（8），可以得到下列以矩陣表示的形式：

$$L = AX + V \dots \dots \dots (9)$$

式中：

$$L = [N_1, N_2, N_3, \dots, N_n]^T$$

$$X = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_9]^T$$

$$V = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_n]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & y_1^3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2y_2 & x_2y_2^2 & y_2^3 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2y_3 & x_3y_3^2 & y_3^3 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_ny_n & y_n^2 & x_n^3 & x_n^2y_n & x_ny_n^2 & y_n^3 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (10)$$

對於每一個共同點，由於已知其大地起伏與平面坐標，可以根據方程式（7），列出一個觀測方程式。因此，當測區內之共同點數量大於待定係數的數量時，則可以最小二乘法平差計算，求解待定係數。在方程式（8）中，若取平面坐標 (x,y) 的一次項，則稱為平面擬合（如方程式（4））；取二次項，稱曲面擬合（如方程式（5）、（6））；取三次項，稱三次多項式擬合，依此類推。

## (二) 神經網路擬合法

神經網路（又稱為人工神經網路或類神經網路），是由一些簡單的神經元（節點），按一定的方式連結構成的非線性網路，具有平行處理和分布式資訊儲存機制，並具有自組織與自適應等功能（靳藩等，1992）。它能通過學習自動抽取學習樣本之間的關係，其非線性映射能力和無模型估計的特徵受到人們的重視。

BP神經網路（即多層前饋神經網路），為神經網路的算法之一，因其採用誤差反向傳播算法（Error Back-Propagation，即BP算法）而得名。BP算法結構簡單、易於實現，在人工神經網路的實際運用中，80%至90%的神經網路模型是採用BP神經網路或它的變化形式，目前主要用於模式識別與分類、函數逼近、數據壓縮及預測等領域（蘭雪梅等，2003）。

BP神經網路的結構，分為輸入層、隱層（隱層可以是一層或多層）和輸出層，它能以任一精度逼近任何非線性連續函數，並具有較強的聯想記憶和推廣能力。BP神經網路的層與層之間採用全互連方式，同一層的神經元（節點）之間則不存在相互連結。

假設某一區域內有n個測站，分別用GPS測量與水準測量，測定出其對應的點位坐標與大地起伏，在此將這些測站定義為參考點。因此，可以利用這些已知參考點集合 $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ 對BP神經網路作訓練（胡伍生等，2001；Hu, et al., 2004; Kavzoglu and Saka, 2005; Kuhar et al., 2001; Lin, 2007; Stopar et al., 2006），其中：

$$P_i = (x_i, y_i, N_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (11)$$

BP神經網路對樣本集P進行學習，以建立輸入層與輸出層之間的映射關係：

$$N = \text{Geoid}(x, y) \dots \dots \dots (12)$$

式中， $(x, y)$ 為點位的平面坐標，為輸入神經網路的輸入層；N為大地起伏，作為神經網路輸出層的學習目標。方程式（12），蘊含於BP神經網路的結構中，並由程式來實現。

如果神經網路的學習誤差滿足要求，則轉入工作階段，輸入待轉換高程點位的平面坐標 $(x, y)$ ，利用已經訓練好的神經網路，求得該點的大地起伏N；再由觀測的橢球高h與公式 $H = h - N$ ，求得該點的正高H。

## 四、實驗結果與討論

### (一) 台南市 e-GPS 系統簡介

台南市政府於民國九十六年九月完成涵蓋全市的e-GPS系統建置，該系統含6個主站（吳相忠，2008）。其中5個主站平均分佈於台南市邊界，包含白河區、南化區、關廟區、七股區、北門區等，形成一個接近正五邊形的網；並在台南市的概略地理中心官田區設置第6個主站，其位置恰位於五邊形的網形中心點上，使各主站之間的距離均不會超過30公里。再於民國九十九年四月新增一個玉井主站，以提昇山區e-GPS測量精度及效率。該e-GPS系統主站儀器為Trimble NetR5、移動站儀器為Trimble R8，這兩種儀器皆具72頻道，可同時接收GPS衛星（L1、L2、L2C）、GLONASS衛星觀測資料。圖1所示，為台南市e-GPS系統7個主站分布圖。

台南市e-GPS系統，經野外實地測試，平面精度為 $\pm 2\text{cm}$ ，橢球高精度為 $\pm 5\text{cm}$ ，其精度足以應用於地籍測量、工程測量，目前台南市政府正積極應用於圖根點測設、戶地測量、鑑界等地籍測量業務（台南市，2011）。

### (二) 實驗資料

為了探討e-GPS水準測量的精度，本文以台南市地區（總面積約2,192平方公里或219,200公頃）內145個一等水準點為實驗對象。主要實驗資料有：（1）內政部民國九十一年、九十二年公告之台南市地區內145個一等水準點的正高H與GPS測量資料（含平面坐標及橢球高h等）；（2）內政部民國九十八年公告之台南市地區內145個一等水準點的正高H（不含平面坐標）；（3）民國九十九年台南市政府提供的台南市地區122個一等水準點上的e-GPS測量資料（含平面坐標及橢球高h）。

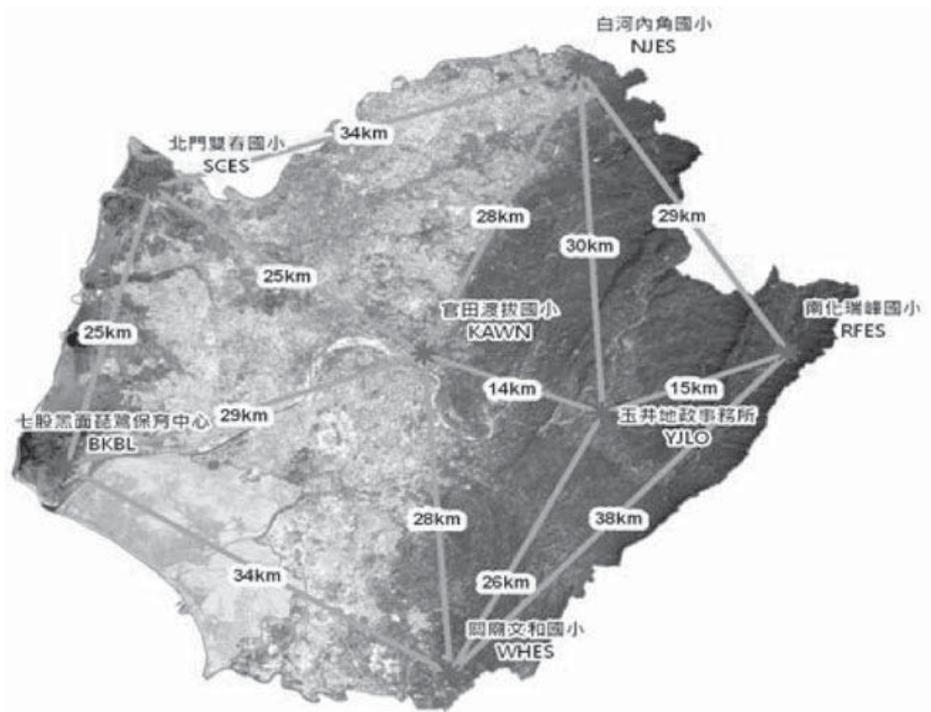


圖1 台南市e-GPS系統7個主站分布圖

### (三) 實驗方法

實驗主要分成兩部分：(1) 以幾何擬合法建構台南市區域大地起伏模式及有關精度分析，(2) 在台南市地區122個一等水準點上實施e-GPS水準測量，得到正高估值，再與內政部民國九十八年公告之正高值比較，分析e-GPS水準測量的精度。

### (四) 實驗結果與討論

#### 1. 以幾何擬合法建構台南市區域大地起伏模式及精度分析

利用內政部民國九十一年、九十二年公告之台南市145點一等水準點資料(含平面坐標、正高及橢球高等資料)，以多項式及倒傳遞神經網路(以BP代表之)幾何擬合法，建構台南市區域大地起伏模式。

為了建構與測試台南市區域大地起伏模式，將145點一等水準點的資料分成參考點與檢核點兩群。所謂參考點，其有關資料(如平面坐標、正高及橢球高等資料)，將被用以求解多項式的待定參數或訓練神經網路。所謂檢核點，其有關資料(如平面坐標、正高及橢球高等資料)，不參與求解多項式的待定係數或訓練神經

網路，而將被用以評估以多項式或神經網路所建構的區域大地起伏模式的精度。

假設，由內政部提供之一等水準點的正高 $H$ ，與橢球高 $h$ 計算之大地起伏 $N$ （以方程式（3）計算）為真值，其與由所建構的大地起伏模式所估計之大地起伏估值 $\hat{N}$ 之差，定義為 $\Delta N$ ，如下列公式：

$$\Delta N_i = N_i - \hat{N}_i, i = 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (13)$$

式中， $i = 1, 2, \dots, n$ 為檢核點的編號；因此，每一檢核點有兩種大地起伏值， $N$ 及 $\hat{N}$ ，根據上式可以計算每一檢核點之 $\Delta N$ 。因此，對於整個實驗區，如果有 $n$ 個檢核點，則可以計算全區 $n$ 個檢核點 $\Delta N$ 的最大值、最小值、平均值與標準差等統計值（Ghilani, 2010）。這些檢核點 $\Delta N$ 的統計值，將被用以評估大地起伏擬合精度。

#### （1）參考點數量與大地起伏擬合精度關係的實驗結果與討論

根據有關建構大地起伏模式之研究文獻（姚吉利等，2008；張京禮等，2004；謝勁松，2010；鄭志毅等，2008）顯示，大地起伏擬合精度與參考點的分布、數量有很大的關係。因此，為了瞭解台南市地區大地起伏模式擬合的精度與參考點的分布、數量的關係，就現有145點一等水準點的資料，分成參考點與檢核點兩群。參考點與檢核點的總數為145點，然而，參考點與檢核點的數量做某種比例調整。例如，每20點選1點當作參考點，其他19點為檢核點（換言之，參考點數量與檢核點數量之比例為1/20）；所以，此時參考點與檢核點的數量，分別為7點與138點（總數仍然為145點）。按此原則，總共有21種不同參考點與檢核點的組合，詳如表1所示的參考點數量與檢核點數量。

上述21種不同參考點與檢核點的組合資料中，參考點資料用以估計曲面擬合（六參數多項式，如方程式（6）所示）的參數，檢核點資料則用以評估大地起伏擬合精度。有關實驗結果之統計資料，如表1所示。圖2代表檢核點的 $\Delta N$ 平均值與標準差與參考點數量之關係圖，圖3代表檢核點的 $\Delta N$ 最大值與最小值與參考點數量之關係圖。在圖2與圖3中，橫軸代表參考點的數量，縱軸代表各統計值，如平均值、標準差、最大值、最小值等（以公尺為單位）。

從表1及圖2、圖3的成果可見，若就檢核點 $\Delta N$ 的標準差而言，隨著參考點數量的增加，其對應的標準差逐漸減少。當參考點數量為7點時（對應之檢核點數量為138點），其標準差為 $\pm 0.066\text{m}$ ；然而，當參考點數量增加為138點時（對應之檢核點數量為7點），其標準差則下降為 $\pm 0.025\text{m}$ 。在檢核點 $\Delta N$ 的平均值方面，隨著參考點數量的增加，其對應的平均值也是逐漸減少，當參考點數量為36點、109點及129點時， $\Delta N$ 的平均值皆趨近於 $0.000\text{m}$ 。

表1 以六參數多項式及不同數量的參考點，建構台南市區域的大地起伏模式後，內插檢核點的 $\Delta N$ 統計表

參考點數量	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>14</b>	<b>16</b>	<b>18</b>	<b>20</b>	24
檢核點數量	<b>138</b>	<b>136</b>	<b>131</b>	<b>129</b>	<b>127</b>	<b>125</b>	121
最大值 (m)	0.251	0.268	0.342	0.283	0.311	0.270	0.197
最小值 (m)	-0.150	-0.121	-0.100	-0.138	-0.107	-0.102	-0.287
標準差 (m)	$\pm 0.066$	$\pm 0.057$	$\pm 0.063$	$\pm 0.062$	$\pm 0.060$	$\pm 0.056$	$\pm 0.068$
平均值 (m)	0.043	0.019	0.013	0.004	0.009	0.006	-0.003
參考點數量	<b>29</b>	<b>36</b>	<b>48</b>	<b>73</b>	<b>97</b>	<b>109</b>	<b>116</b>
檢核點數量	<b>116</b>	<b>109</b>	<b>97</b>	<b>72</b>	<b>48</b>	<b>36</b>	<b>29</b>
最大值 (m)	0.275	0.233	0.172	0.131	0.123	<b>0.092</b>	0.086
最小值 (m)	-0.119	-0.125	-0.248	-0.110	-0.106	<b>-0.073</b>	-0.064
標準差 (m)	$\pm 0.059$	$\pm 0.056$	$\pm 0.061$	$\pm 0.048$	$\pm 0.052$	$\pm 0.049$	$\pm 0.040$
平均值 (m)	0.005	0.000	-0.010	-0.003	0.005	<b>-0.001</b>	-0.002
參考點數量	<b>121</b>	<b>125</b>	<b>127</b>	<b>129</b>	<b>131</b>	<b>136</b>	<b>138</b>
檢核點數量	<b>24</b>	<b>20</b>	<b>18</b>	<b>16</b>	<b>14</b>	<b>9</b>	<b>7</b>
最大值 (m)	0.098	0.092	0.089	<b>0.092</b>	0.070	0.047	0.009
最小值 (m)	-0.113	-0.103	-0.073	<b>-0.074</b>	-0.061	-0.066	-0.061
標準差 (m)	$\pm 0.049$	$\pm 0.052$	$\pm 0.047$	$\pm 0.039$	$\pm 0.035$	$\pm 0.035$	$\pm 0.025$
平均值 (m)	-0.002	-0.003	-0.007	<b>0.000</b>	-0.009	-0.022	-0.027

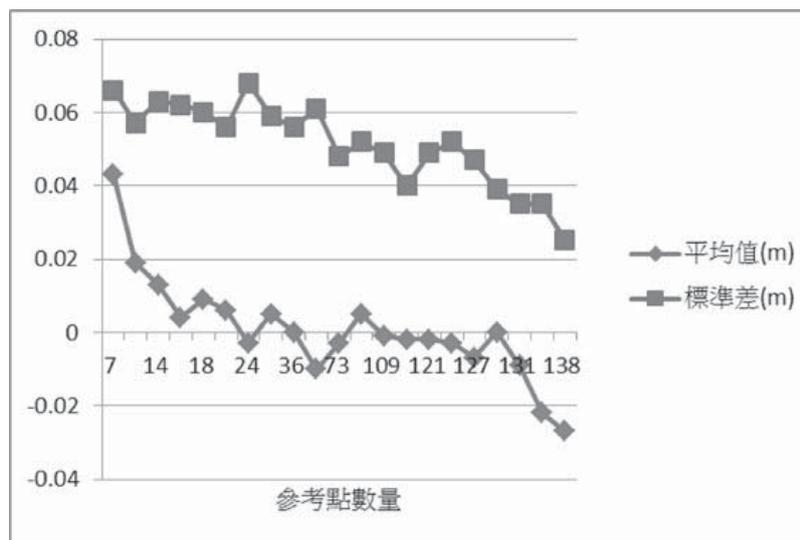


圖2 檢核點的 $\Delta N$ 平均值與標準差與參考點數量之關係圖

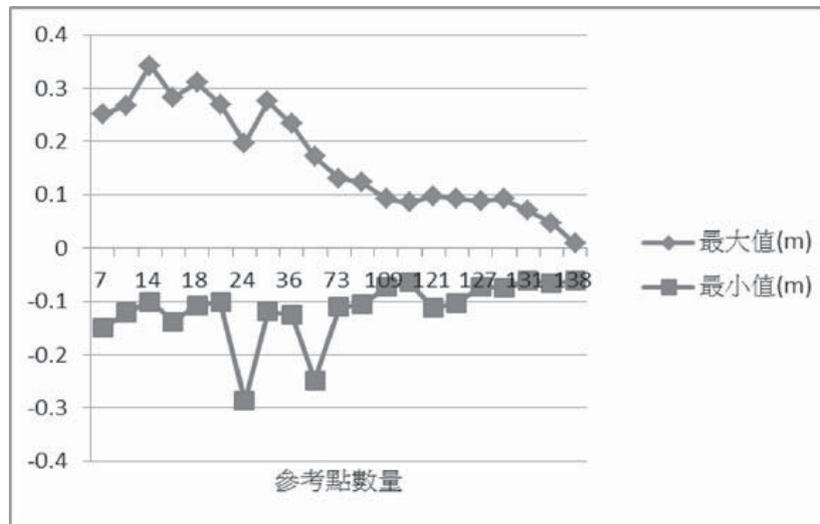


圖3 檢核點的 $\Delta N$ 最大值與最小值與參考點數量之關係圖

另一方面，在檢核點 $\Delta N$ 的最大值方面，隨著參考點數量的增加，其對應的最大值也是逐漸減少。當參考點數量等於或大於109點時，檢核點 $\Delta N$ 的最大值趨近於平穩。在檢核點 $\Delta N$ 的最小值方面，隨著參考點數量的增加，其對應的最小值則是逐漸增加。當參考點數量等於或大於109點時，檢核點 $\Delta N$ 的最小值亦趨近於平穩。

綜上所述，大地起伏擬合精度，與參考點數量、分布有密切關係。理論上，為了確保擬合精度，應該增加參考點數量。另一方面，為了評估擬合精度，也需要相當數量的檢核點。然而，區域內已知大地起伏值的點位有限（如本實驗區僅有145點水準點資料）。因此，為了兼顧上述兩種需求，必須由區域內檢核點 $\Delta N$ 的標準差、平均值、最大值與最小值等四方面來考量，選擇區域內適當的參考點數量與檢核點數量。原則上，標準差越小越好，平均值、最大值與最小值以趨近於0.000m較好。根據表1及圖2、圖3的成果，發現參考點數量為109點及129點時，其對應檢核點 $\Delta N$ 的標準差分別為 $\pm 0.049\text{m}$ （檢核點數量為36點）及 $\pm 0.039\text{m}$ （檢核點數量為16點），能合乎上述要求。再經由統計學上的F-test（Ghilani, 2010）之後，發現在顯著水準 $\alpha=0.05$ 的情況下，參考點數量為109點及129點時，對應之檢核點 $\Delta N$ 標準差雖然不同，但是，沒有理由排斥兩者的精度是一樣的假設。因此，為了兼顧要有相當數量的參考點與檢核點的需求下，在以下的各種大地起伏擬合實驗中，均採用參考點數量為109點及檢核點數量為36點的組合。

(2) 多項式擬合法的實驗結果與討論

根據方程式(7)至(10)，利用109點參考點資料，以多項式建構台南市區域的大地起伏模式。然後，再用36點檢核點資料，計算、評估檢核點 $\Delta N$ 的最大值、最小值、標準差與平均值。根據多項式待求係數的數量多寡，本文測試的多項式有三種，分別為平面擬合(或稱四參數多項式，如方程式(5)所示)、曲面擬合(或稱六參數多項式，如方程式(6)所示)與三次多項式擬合(或稱十參數多項式，如方程式(8)所示)。

以四參數、六參數及十參數多項式，建構台南市區域的大地起伏模式後，內插36點檢核點的 $\Delta N$ 變化圖，如圖4所示；有關統計資料，如表2所示。圖4中，縱軸代表 $\Delta N$ (以公尺為單位)，橫軸代表檢核點的編號( $i=1, 2, \dots, 36$ )。

表2 以四參數、六參數及十參數多項式，建構台南市區域的大地起伏模式後，內插36點檢核點的 $\Delta N$ 統計表

大地起伏模式	最大值 (m)	最小值 (m)	標準差 (m)	平均值 (m)
四參數多項式	0.320	-0.392	$\pm 0.172$	-0.001
六參數多項式	0.092	-0.073	$\pm 0.049$	-0.001
十參數多項式	-0.015	-0.148	$\pm 0.030$	-0.096

從表2及圖4的成果可見，若就 $\Delta N$ 的標準差而言，六參數多項式(等於 $\pm 0.049m$ )與十參數多項式(等於 $\pm 0.030m$ )的擬合效果，較四參數多項式(等於 $\pm 0.172m$ )為佳；然而，就 $\Delta N$ 平均值而言，六參數多項式的 $\Delta N$ 平均值為 $-0.001m$ ，遠小於十參數多項式的 $-0.096m$ 。因此，整體而言，三種多項式中，以六參數多項式建構的台南市區域大地起伏模式的擬合效果最好。

(3) 神經網路擬合法的實驗結果與討論

以倒傳遞神經網路(以BP代表之)，建構台南市區域大地起伏模式方面，採用3層神經網路結構：分別為輸入層、隱藏層及輸出層(胡伍生等，2001；Hu, et al., 2004; Kavzoglu and Saka, 2005; Kuhar et al., 2001; Lin, 2007; Stopar et al., 2006)。輸入層有兩個輸入單元，分別為每一個水準點的平面坐標。輸出層有一個輸出單元，為每一個水準點的大地起伏。至於隱藏層的神經元數量，則必須以試誤法求定。利用109點參考點資料，以不同BP(不同神經元數目)，建構台南市區域的大地起伏模式後；再以36點檢核點的資料，評估大地起伏擬合精度，其成果如表3所示。

從表3成果中可見，當神經元為35時，所建構區域大地起伏模式的精度最好，其 $\Delta N$ 的標準差 $\pm 0.028\text{m}$ 。圖5所示為以35個神經元BP神經網路，建構台南市區域的大地起伏模式後，內插36點檢核點的 $\Delta N$ 變化圖。

表3 以不同神經元數目的BP神經網路，建構台南市區域的大地起伏模式後，內插36點檢核點的 $\Delta N$ 統計表

神經元數	5	10	15	20	25	30
$\Delta N$ 最大值 (m)	0.093	0.105	0.161	0.094	0.169	0.090
$\Delta N$ 最小值 (m)	-0.055	-0.060	-0.044	-0.050	-0.052	-0.051
$\Delta N$ 標準差 (m)	$\pm 0.033$	$\pm 0.034$	$\pm 0.032$	$\pm 0.030$	$\pm 0.044$	$\pm 0.031$
$\Delta N$ 平均值 (m)	0.018	0.019	0.019	0.010	0.022	0.010
神經元數	35	40	45	50	100	
$\Delta N$ 最大值 (m)	<b>0.089</b>	0.107	0.108	0.766	0.160	
$\Delta N$ 最小值 (m)	<b>-0.054</b>	-0.043	-0.056	-1.096	-0.053	
$\Delta N$ 標準差 (m)	$\pm 0.028$	$\pm 0.032$	$\pm 0.034$	$\pm 0.446$	$\pm 0.041$	
$\Delta N$ 平均值 (m)	<b>0.009</b>	0.015	0.014	-0.172	0.160	

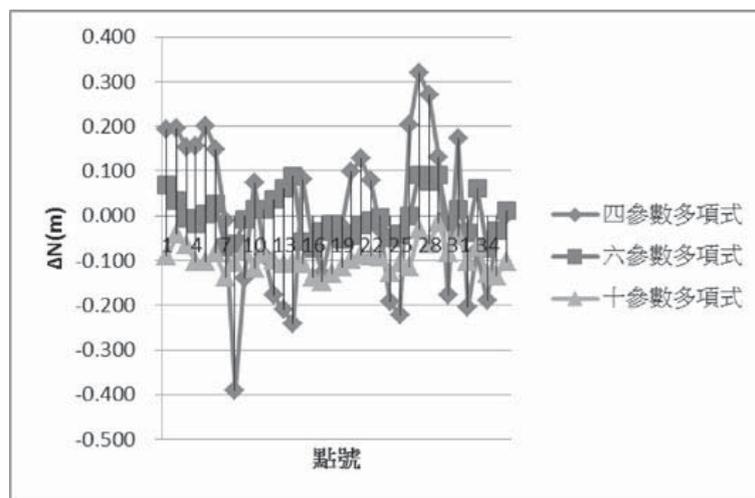


圖4 以四參數、六參數及十參數多項式，建構台南市區域的大地起伏模式後，內插36點檢核點的 $\Delta N$ 變化圖

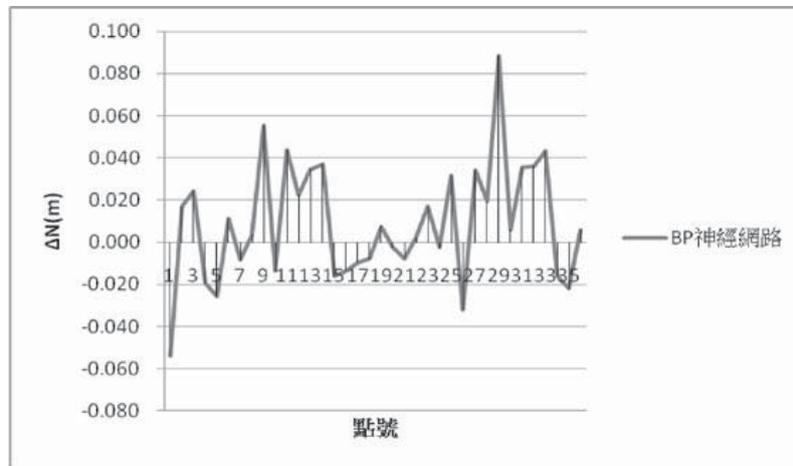


圖5 以35個神經元BP神經網路，建構台南市區域的大地起伏模式後，內插36點檢核點的 $\Delta N$ 變化圖

表4 以35個神經元BP神經網路及六參數多項式，建構台南市區域的大地起伏模式後，內插36點檢核點的 $\Delta N$ 統計表

大地起伏模式	最大值 (m)	最小值 (m)	標準差 (m)	平均值 (m)
BP神經網路	0.089	-0.054	$\pm 0.028$	0.009
六參數多項式	0.092	-0.073	$\pm 0.049$	-0.001

#### (4) 小結

為了進一步了解多項式擬合法與神經網路擬合法，在建構區域大地起伏模式的擬合效果，將上述兩種擬合法之實驗結果整理如後：圖6所示，為以35個神經元BP神經網路及六參數多項式，建構台南市區域的大地起伏模式後，內插36點檢核點的 $\Delta N$ 變化圖；表4所示，為以35個神經元BP神經網路及六參數多項式，建構台南市區域的大地起伏模式後，內插36點檢核點的 $\Delta N$ 之統計表。

由表4及圖6的成果，顯示BP神經網路所建構的區域大地起伏模式之擬合效果，優於多項式。因此，在下節所介紹的e-GPS水準測量的實驗過程中，台南市區域的大地起伏模式，將採用本節介紹的35個神經元BP神經網路所建構的區域大地起伏模式。

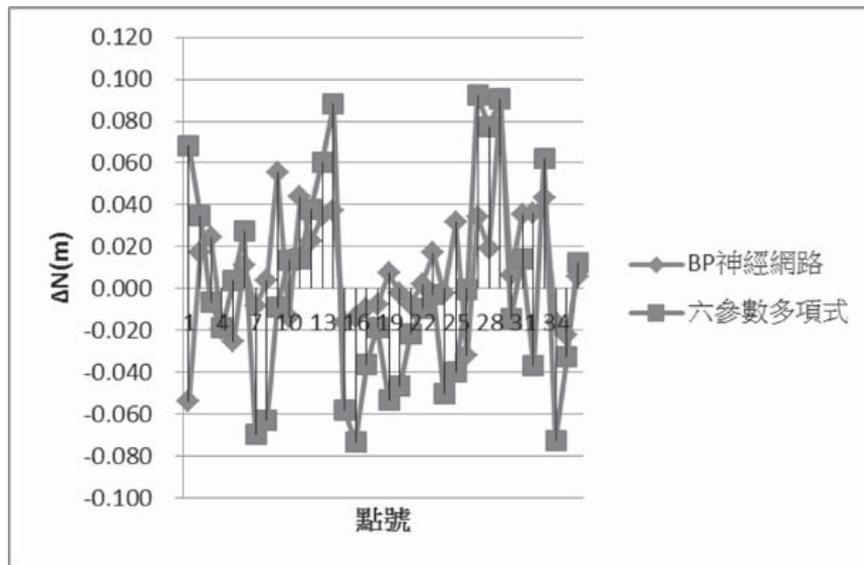


圖6 以35個神經元BP神經網路及六參數多項式，建構台南市區域的大地起伏模式後，內插36點檢核點的 $\Delta N$ 變化圖

## 2. 在一等水準點上實施e-GPS水準測量及精度分析

### (1) 內政部不同年度公告之台南市一等水準點正高值比較

台灣地區水準點的高程，乃是基於TWVD2001基準面的正高，內政部曾經於民國九十一年、九十二年及九十八年分別公告台灣地區所有一等水準點的高程。然而，從民國九十一年至九十八年之間，由於時空因素，有些點位高程可能有異動，因此，有必要分析台南市內一等水準點（145點），從民國九十一年起至民國九十八年之間的正高值變化。

若令98-91dH，代表台南市內一等水準點之民國九十八年正高公告值，減去民國九十一年正高公告值的差值。台南市145點一等水準點之98-91dH成果，如圖7所示。圖中，橫軸代表水準點點號，縱軸代表98-91dH（單位為公尺）。由圖7可見，98-91dH的最大值，發生在點號3196處（差異量為-13.610m），其次，為點號G080、G079（差異量分別為 -2.844m、2.844m），點號1137處（差異量為-1.725m）。經查，這些水準點的原來點位，由於某種原因以致不存在；故在這些原來點位附近，補設新的水準點。

如果將上述98-91dH大於 $\pm 1$ m的水準點去掉後（剩下141點），重新繪製如圖8所示。將以上兩種狀況（狀況A：包含所有水準點；狀況B：98-91dH小於 $\pm 1$ m之水準點）的統計資料，整理如表5。從圖8及表5可見，台南市內一等水準點（141點），從民國九十一年起至民國九十八年之間的正高值，已發生變化。98-91dH

的最大值與最小值分別為0.602m及-0.771m；98-91dH的標準差與平均值分別為±0.136m及-0.015m。

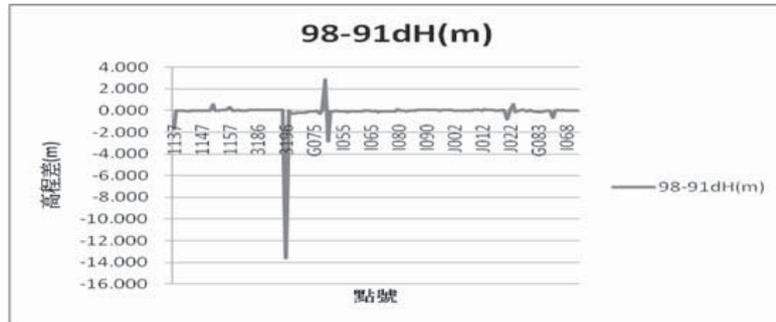


圖7 台南市145點一等水準點之98-91dH比較圖

表5 台南市一等水準點之98-91dH統計表（狀況A：所有145點水準點，狀況B：98-91dH小於±1m之141點水準點）

狀況	最大值 (m)	最小值 (m)	標準差 (m)	平均值 (m)
A	2.844	-13.610	±1.193	-0.120
B	0.602	-0.771	±0.136	-0.015

為了進一步了解台南市內一等水準點，從民國九十一年起至民國九十八年之間的正高變化，將98-91dH分布的直方圖，繪製如圖9。從圖9可見，台南市內92.9%（131/141）的一等水準點，從民國九十一年起至民國九十八年之間的高程變化，大部分集中在±0.200m。由以上分析成果，可見台南市內一等水準點，從民國九十一年起至民國九十八年之間的高程，已經發生了變化。因此，為了符合現況，後續的e-GPS水準測量精度研究分析，在正高部分，將採用內政部民國九十八年公告之正高值，當作對照組。

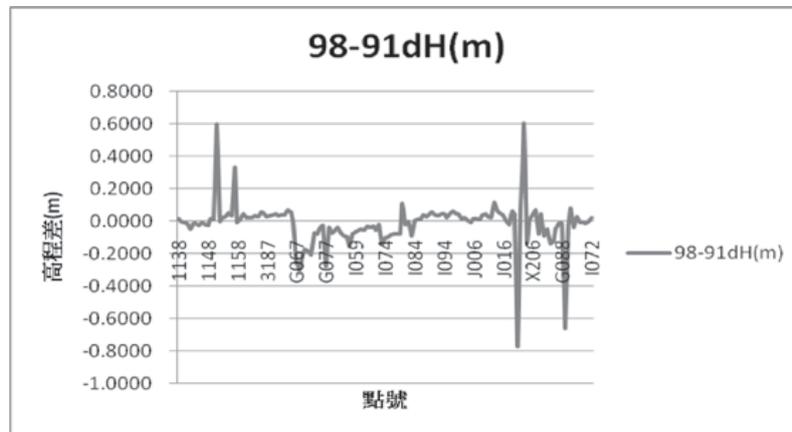


圖8 台南市141點一等水準點之98-91dH（小於±1m）比較圖

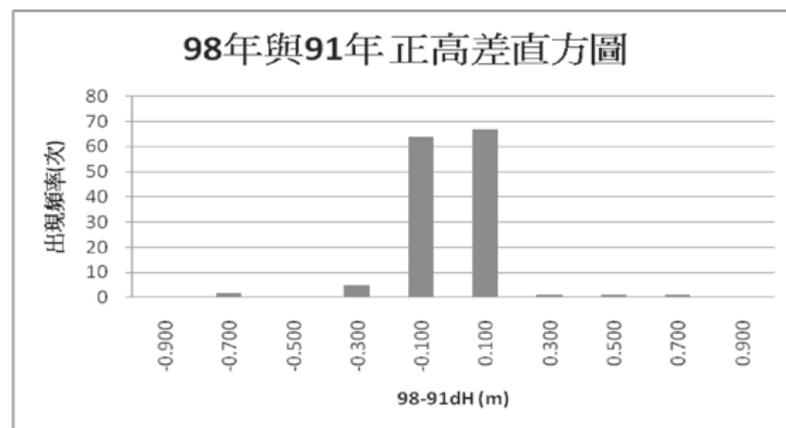


圖9 台南市141點一等水準點之98-91dH（小於±1m）之直方圖

(2) 在一等水準點上實施e-GPS水準測量及精度分析

為了瞭解e-GPS水準測量的功效，於民國九十九年，利用台南市e-GPS系統，在台南市地區的一等水準點上實施e-GPS測量；通常，在每一個水準點上停留一段時間，等待e-GPS系統初始化成功後，連續觀測兩組到三組的成果，然後再取其平均值，做為點位的最後成果。因此，每一個點位的最後成果有水準點點號、平面坐標、橢球高等。由於，某些水準點位於樹下，GPS衛星訊號受到遮蔽，以致e-GPS系統無法初始化；因此，最後總共在122點一等水準點上，測得e-GPS點位成果。

在探討e-GPS水準測量的精度方面，主要的進行步驟為：（1）利用內政部民國九十一年、九十二年公告之台南市145點一等水準點資料，以35個神經元之倒傳遞神經網路（以BP代表之），建構台南市區域性大地起伏模式（方法如上節所

述)。(2)於民國九十九年,利用台南市e-GPS系統測量的122點一等水準點之平面坐標,以及BP神經網路建構好的台南市區域性大地起伏模式,估計所有122點一等水準點的大地起伏 $N$ ; (3)由e-GPS系統測量的之橢球高 $h$ 及上述步驟內插的 $N$ 值,用 $H = h - N$ 公式,計算122點一等水準點之正高估值 $\hat{h}$ 值; (4)假設內政部民國九十八年公告之一等水準點之正高值 $H$ 為真值,其與步驟(3)計算的 $\hat{h}$ 值相減,得到兩者之差值 $\Delta H$ ,  $\Delta H = H - \hat{h}$ 。因此,每一水準點可以計算一個 $\Delta H$ 值。再比照方程式(13),計算全區122點一等水準點 $\Delta H$ 的最大值、最小值、標準差及平均值等統計值。表6所示,為台南市122點一等水準點,e-GPS水準測量正高 $\hat{h}$ ,與內政部九十八年公告之正高 $H$ 差異值 $\Delta H$ 統計表(狀況說明:A表示所有122點一等水準點的e-GPS水準測量的 $\Delta H$ 統計值,B表示滿足 $|\Delta H| < 0.5\text{m}$ 時的120點一等水準點的e-GPS水準測量的 $\Delta H$ 統計值,C表示 $|\Delta H| < 0.1\text{m}$ 時的113點一等水準點的e-GPS水準測量的 $\Delta H$ 統計值)。圖10所示,為當 $|\Delta H| < 0.1\text{m}$ 時的台南市113點一等水準點的e-GPS水準測量的 $\Delta H$ 變化圖。

表6 台南市一等水準點e-GPS水準測量正高 $\hat{h}$ 與內政部民國九十八年公告之正高 $H$ 差異值 $\Delta H$ 統計表

狀況	最大值 (m)	最小值 (m)	標準差 (m)	平均值 (m)
A (122點, 100%)	0.061	-0.213	$\pm 0.051$	-0.050
B (120點, 98.4%)	0.061	-0.156	$\pm 0.048$	-0.048
C (113點, 92.6%)	0.061	-0.113	$\pm 0.044$	-0.042

從表6的結果顯示,在台南市122點一等水準點實施e-GPS水準測量, $\Delta H$ 的標準差為 $\pm 0.051\text{m}$ ,大約與e-GPS測量之橢球高精度相當(台南市,2001)。而在較好的狀況,有113點(總數的92.6%)滿足 $|\Delta H| < 0.1\text{m}$ 的條件,此時 $\Delta H$ 的標準差為 $\pm 0.044\text{m}$ 。

根據上述定義, $\Delta H = H - \hat{h}$ ,其中 $H$ 為內政部的正高公告值,其精度為 $\pm 0.009\text{m}$ (Yang et al., 2003);至於, $\hat{h}$ 為e-GPS水準測量的正高估值。因為 $\hat{h} = h - N$ ,而 $h$ 為橢球高,其精度在靜態GPS測量為 $\pm 0.036\text{m}$ (Yang et al., 2003),e-GPS測量為 $\pm 0.050\text{m}$ (台南市,2001); $N$ 為估計的大地起伏值,根據上節利用BP神經網路建構台南市區域大地起伏模式的實驗,其精度為 $\pm 0.028\text{m}$ 。所以,根據誤差傳播原理,估計 $\hat{h}$ 的精度在 $\pm 0.046\text{m}$ 與 $\pm 0.057\text{m}$ 之間。由此,推估 $\Delta H$ 的精度在 $\pm 0.047\text{m}$ 與 $\pm 0.058\text{m}$ 之間。

因此，進一步檢視表6的結果，可見在台南市一等水準點上實施e-GPS水準測量所得之正高 $\hat{h}$ ，與內政部98年公告之正高H值之差異值 $\Delta H$ 標準差，基本上介於上述的推估精度（ $\Delta H$ 標準差在 $\pm 0.047\text{m}$ 與 $\pm 0.058\text{m}$ 之間）。

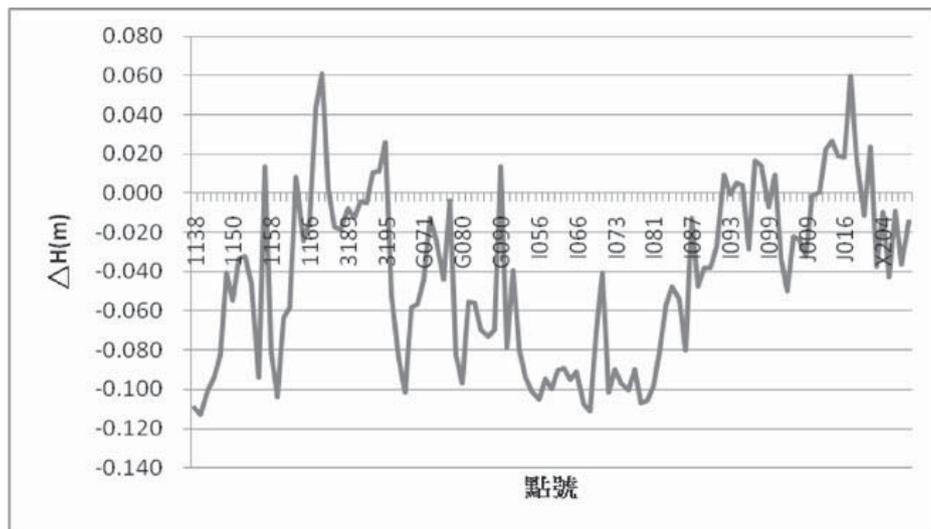


圖10 當  $|\Delta H| < 0.1\text{m}$  時的台南市113點水準點的e-GPS水準測量的 $\Delta H$ 變化圖

然而，從表6的結果，可發現狀況A、B、C的 $\Delta H$ 平均值約在 $-0.042\text{m}$ 與 $-0.050\text{m}$ 之間（並非等於 $0.000\text{m}$ ）；為狀況C的 $\Delta H$ 變化圖，如圖10所示。因此，判斷本實驗的e-GPS水準測量成果，可能尚存在某種系統誤差待改正。

### (3) 小結

根據內政部提供的不同年度施測的一等水準點正高資料分析，可見台南市內一等水準點，從民國九十一年起至民國九十八年之間的高程，已經發生了變化，92.9%（131/141）的一等水準點之高程變化值集中在 $\pm 0.200\text{m}$ 。

在台南市一等水準點上實施e-GPS水準測量所得之正高估值 $\hat{h}$ ，與內政部民國九十八年公告之正高H值之差異值 $\Delta H$ 之標準差，在 $\pm 0.047\text{m}$ 與 $\pm 0.058\text{m}$ 之間。然而，各種狀況的 $\Delta H$ 平均值並非等於 $0.000\text{m}$ ；因此，判斷本實驗的e-GPS水準測量成果，可能尚存在某種系統誤差待改正。

## 五、結 論

本文利用內政部所提供的一等水準點資料以及台南市政府所提供的在一等水準點上施測之e-GPS測量成果，探討e-GPS水準測量精度有關的議題如：（1）建構區域大地起伏模式及有關精度分析，（2）在一等水準點上實施e-GPS水準測量，得到正高估值，再與已知正高值比較，分析e-GPS水準測量的精度。

實驗結果顯示：（1）在建構台南市區域大地起伏模式方面，BP神經網路的擬合精度優於多項式擬合。（2）在一等水準點上實施e-GPS水準測量方面，全區122點水準點上實施e-GPS水準測量獲得的正高估值與內政部之公告值比較，得到正高差 $\Delta H$ 最大值、最小值、標準差與平均值分別為0.060m、-0.213m、 $\pm 0.051$ m與-0.050m。因此，如果有足夠精度的區域大地起伏模式，那麼e-GPS水準測量的精度約與e-GPS的橢球高精度相當。

然而，由上述實驗成果發現，e-GPS水準測量的正高差 $\Delta H$ 的平均值為-0.050m，判斷本實驗的e-GPS水準測量成果，可能尚存在某種系統誤差待改正。因此，未來將持續對此問題加以研究，找出較佳的方法，消除上述系統誤差，提升e-GPS水準測量的精度，以符合測量製圖需求，進而可以逐漸取代傳統的逐差水準測量，充分發揮e-GPS快速測量的功效。

## 謝 誌

本文所用的台灣地區一等水準點資料，由內政部衛星測量中心所提供；台南市一等準點的e-GPS測量成果，由台南市政府提供；特此一併致謝。

## 參考文獻

- 王敏雄，2005，全國性 e-GPS 衛星定位基準站即時動態定位系統建置及測試作業，台中：內政部土地測量局。
- 王文安，2005，應用不同方法推求區域性大地起伏值之研究 - 以台中市為例，國立中興大學土木系碩士論文。
- 王繼剛、胡永輝、孔令傑，2009，基於最小二乘支持向量機的區域 GPS 高程轉換組合，大地測量與地球動力學，第 29 卷，第 5 期，頁 99-102。

- 台南市政府，2011，台南市 e-GPS 即時動態定位系統入口網站，<http://egps.tainan.gov.tw>。
- 田新亞、姜川，2008，GPS 水準在高程測量中的應用，地下水，第 30 卷，第 5 期，頁 123-125。
- 李尚訓，2010，利用支持向量機法推求區域性大地起伏值之研究—以台中地區為例，國立中興大學土木系碩士論文。
- 吳相忠，2008，台南縣 e-GPS 系統應用於地籍測量推展情形，第八屆 GPS 衛星科技研討會：國立成功大學。
- 吳良才、胡振琪，2004，GPS 高程轉換方法和正常高計算，測繪學院學報，第 21 卷，第 4 期，頁 256-258。
- 周理含，2010，最小二乘支持向量機在 GPS 高程轉換中的應用，工程地球物理學報，第 7 卷，第 2 期，頁 243-247。
- 胡伍生、華錫生、吳中如，2001，用神經網絡方法探測數學模型誤差，大霸觀測與土工測試，第 25 卷，第 4 期，頁 13-16。
- 姚吉利、曲國慶、劉科利、高鵬，2008，擬合點分布與 GPS 水準面擬合精度關係研究，大地測量與地球動力學，第 28 卷，第 5 期，頁 50-54。
- 高書屏、沈昱廷，2011，應用最小二乘支持向量機於區域性大地起伏值之研究—以台中地區為例，第三十屆測量及空間資訊研討會論文集：國立中興大學。
- 張京禮，史振江，李瑞，2004，GPS 高程擬合精度探討，測繪工程，第 13 卷，第 2 期，頁 29-31。
- 黃聖日、林老生，2011，以多項式擬合法建構區域大地起伏模型之研究—以政大校區為例，第三十屆測量及空間資訊研討會論文集：國立中興大學。
- 靳藩、範俊波、譚永東，1992，神經網路與神經計算機原理、應用，台北：儒林圖書有限公司。
- 楊明清、靳藩、朱達成、陳現春，1999，用神經網絡方法轉換 GPS 高程，測繪學報，第 28 卷，第 4 期，頁 301-307。
- 董玉磊、高飛，2007，支持向量機方法在 GPS 高程轉換中的應用，山東理工大學學報—自然科學版，第 21 卷，第 3 期，頁 90-93。
- 謝勁松，2010，GPS 高程測量原理及方法探討，廣東科技，第 231 期，頁 87-88。
- 鄭志毅、高書屏、唐仁楦，2008，建立臺中市大地起伏模型之研究，第二十七屆測量及空間資訊研討會論文集。

- 蘭雪梅、朱健、黃承明、董德存，2003，BP 網絡的 MATLAB 實現，微型電腦應用，第 19 卷，第 1 期，頁 6-8。
- Ghilani, Charles D., 2010, *Adjustment Computations: Spatial Data Analysis*, 5<sup>th</sup> Edition, Wiley, John Wiley & Sons, Inc.
- Hu, W., Y. Sha, and S. Kuang, 2004, New method for transforming global positioning system height into normal height based on neural network, *Journal of Surveying Engineering*, 130(1), pp. 36-39.
- Kavzoglu, T. and M.H. Saka, 2005, Modelling local GPS/leveling geoid undulations using artificial neural networks, *Journal of Geodesy*, 78, pp. 520-527.
- Kuhar, M., B. Stopar, G. Turk, and T. Ambrozic, 2001, The use of artificial neural network in geoid surface approximation, *AVN. Allg. Vermess.-Nachr.*, jahr. 108, 1, pp. 22-27.
- Lin, L.S., 2007, Application of a Back-Propagation Artificial Neural Network to Regional Grid-Based Geoid Model Generation Using GPS and Leveling Data, *Journal of Surveying Engineering*, 133(2), pp.81-89.
- Stopar, B., T. Ambrozic, M. Kuha, and G. Turk, 2006, GPS-derived geoid using artificial neural network and least squares collocation, *Survey Review*, 38 (300), pp. 513-524.
- Yang, M., K.H. Chen, and S.W. Shiao, 2003, A new height network in Taiwan, *Survey Review*, 37 (290), pp. 260-268.
- Zaletnyik, P., L. Völgyesi, and B. Paláncz, 2008, Modelling local GPS/levelling geoid undulations using Support Vector Machines, *Periodica polytechnic, Civil Engineering*, 52/1, pp. 39-43.